

На правах рукописи



Блинов Павел Юрьевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ И МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ
РАВНОМЕРНОСТИ И ПОКАЗАТЕЛЬНОСТИ МЕТОДАМИ
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Специальность 05.13.17 – Теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Новосибирск – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

Научный руководитель: **Лемешко Борис Юрьевич**,
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Огородников Василий Александрович**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, главный научный сотрудник лаборатории стохастических задач;

Рябко Борис Яковлевич, доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, заведующий лабораторией информационных систем и защиты информации.

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», г. Томск.

Защита диссертации состоится «20» июня 2019 г. в 14⁰⁰ часов в конференц-зале на заседании диссертационного совета по защите Д 212.173.06 при Федеральном государственном образовательном учреждении высшего образования бюджетном образовательном «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета и на сайте <http://www.nstu.ru>.

Автореферат разослан «___» _____ 20__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.173.06



Андрей Владимирович
Фаддеенков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Равномерный и показательный (экспоненциальный) законы распределения вероятностей очень часто используются в различных приложениях. Например, равномерный закон широко используется в задачах метрологического обеспечения и анализе результатов измерений, показательный – в моделях выживаемости и надёжности. Обоснованное применение таких простых моделей законов распределения при анализе сложных процессов и систем зачастую позволяет с меньшими затратами достигать приемлемых решений.

Обоснованность использования конкретной модели закона для описания наблюдаемой случайной величины, как правило, осуществляется в результате анализа экспериментальных данных с использованием критериев проверки гипотезы о принадлежности соответствующей выборки этому закону распределения. Для проверки гипотезы о принадлежности выборки равномерному или показательному закону можно использовать более десятка непараметрических критериев согласия и критериев типа χ^2 . Кроме того, современный аппарат прикладной математической статистики включает более двух десятков специальных критериев, ориентированных только на проверку гипотезы о принадлежности выборок равномерному закону, и примерно столько же критериев, предназначенных для проверки гипотезы о принадлежности выборок показательному закону.

Большой вклад в развитие множества специальных критериев равномерности внесли Sherman B., Kimball B.F., Greenwood V., Bartholomew D.J., Moran P.A.P., Quesenberry C.P., Miller F.L., Marhuenda Y., Morales D., Pardo M.C., Dudewics E.J., Van der Meulen E.C., Zamanzade E., Arghami N.R., Noughabi H.A., Noughabi R.A, Cressie N., Cheng S.W., Spiring F.A. и др.). В создание множества специальных критериев показательности – Ascher S., Deshpande J.V., Epps T.W., Pulley L.B., Gail M.H., Gastwirth J.L., Harris C.M., Kimber A.C., Kochar S.C., Lin C.C., Mudholkar G.S., Shapiro S.S., Baringhaus L., Henze N., Meintanis S.G., Никитин Я.Ю., Волкова К.Ю. и др.

В условиях такого большого выбора критериев перед любым специалистом неизменно встаёт ряд вопросов: какому или каким критериям отдать предпочтение, какой критерий обладает большей мощностью относительно интересующих его альтернатив, какими достоинствами и недостатками обладают конкретные критерии.

Вопросами сравнительного анализа критериев равномерности занимались Stephens M.A., Quesenberry C.P., Miller F.L., Marhuenda Y., Morales D., Pardo M.C., анализом критериев показательности – Gail M.H., Asher S., Rahman M., Han Wu и ряд других авторов.

И в то же время приходится констатировать, что для обоснованного выбора критериев не хватает результатов сравнительного анализа мощности, данных о реальных достоинствах и недостатках критериев. Иногда имеющаяся информация о достоинствах конкретных критериев не соответствует действительности. Возможности некоторых критериев ограничены отсутствием информации о законах распределения их статистик.

При использовании критериев необходимо учитывать следующие моменты.

Статистики критериев измеряют отклонение эмпирического распределения от теоретического закона с использованием различных мер и по-разному реагируют на одинаковые отклонения, что может приводить к различным выводам о результатах проверки гипотезы.

Для одних критериев предельные или асимптотические распределения статистик критериев, соответствующие справедливой проверяемой гипотезе, известны. В этом случае достигнутый уровень значимости p_{value} может оцениваться в соответствии с этим распределением. Однако при ограниченных объёмах выборок свойства критериев и распределения статистик могут существенно отличаться от асимптотических, в результате чего оценки p_{value} будут отличаться от реальных.

Для большинства специальных критериев (равномерности и показательности) распределения статистик зависят от объёмов выборок n и информация об этих распределениях представлена лишь таблицами критических значений для

некоторых объёмов выборок n , что затрудняет применение критериев и делает выводы при отсутствии p_{value} менее информативными и менее обоснованными.

Во многих приложениях результаты измерений (ошибки измерений) бывают представлены с ограниченной точностью Δ . Следует иметь в виду, что с ростом Δ (и с ростом n при фиксированном Δ) реальное распределение статистики критерия при справедливости проверяемой гипотезы H_0 отклоняется от распределения, имеющего место при стандартных предположениях о непрерывности случайной величины.

При проверке сложных гипотез параметры теоретических законов могут оцениваться различными методами. Распределения статистик критериев, как правило, зависят от используемого метода оценивания. Поэтому, модифицируя статистику заменой метода оценивания (что бывает), следует учитывать этот факт.

Таким образом, для обоснованного выбора наиболее предпочтительного критерия или группы критериев необходимо знать их реальные свойства, достоинства и недостатки, границы для возможного применения асимптотических результатов (асимптотических распределений статистик).

Понятно, что формирование статистического вывода о результатах проверки гипотезы на основании достигнутого уровня значимости p_{value} , вычисляемого на основании реального распределения статистики, предпочтительней, чем по асимптотическому распределению этой статистики, в случае различия этих распределений. Тем более что при таком подходе решение об отклонении или не отклонении проверяемой гипотезы оказывается более обоснованным и более информативным по сравнению с принятием решения с использованием таблиц критических значений статистики.

Очевидно, что исследование распределений статистик критериев, исследование их мощности и эффективное применение методов статистического анализа в приложениях без соответствующего программного обеспечения практически невозможно. А при использовании компьютерных технологий и методов статистического (имитационного) моделирования можно не только досконально оценить достоинства и недостатки конкретных критериев, отобрать наиболее мощные, но и позволяет в интерактивном режиме получать реальные распределения

статистик, на которые можно опираться при проверке гипотез. Последнее даёт возможность корректно применять широкое множество критериев, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений, исключающего применение классических результатов. Распараллеливание вычислительных процессов при таком интерактивном моделировании позволяет существенно сократить время для моделирования необходимых эмпирических распределений статистик с требуемой точностью.

Цель и задачи исследований. Основная цель диссертационной работы заключалась в исследовании свойств и сравнительном анализе множества статистических критериев, предназначенных для проверки гипотез о принадлежности данных равномерному или экспоненциальному (показательному) закону распределения, дающих основание для выбора наиболее предпочтительного критерия в конкретной ситуации, в разработке программного обеспечения, позволяющего исследовать и корректно применять соответствующие статистические критерии.

В соответствии с поставленной целью решались следующие задачи:

- создание программного обеспечения, предназначенного для моделирования функций от случайных величин и для проверки гипотез по критериям, рассматриваемым в диссертационной работе, для статистического моделирования и исследования распределений статистик критериев, для вычисления оценок мощности критериев по отношению к различным конкурирующим гипотезам;
- исследование распределений статистик критериев равномерности;
- исследования влияния на эффективность специальных критериев равномерности дополнительных параметров, имеющих место в некоторых критериях;
- вычисление оценок мощности критериев равномерности по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам и проведение сравнительного анализа мощности множества рассмотренных критериев;
- исследование распределений статистик критериев показательности;
- вычисление оценок мощности критериев показательности по отношению к конкурирующим законам с различной формой функции интенсивности отказов и проведение сравнительного анализа множества критериев показательности.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовался аппарат теории вероятностей, математической статистики, статистического моделирования, математического программирования.

Научная новизна диссертационной работы заключается:

- в уточнении реальных свойств множества рассмотренных критериев проверки гипотез;
- в результатах сравнительного анализа мощности критериев равномерности;
- в результатах сравнительного анализа мощности критериев показательности;
- в результатах исследования выбора значений дополнительных параметров на свойства некоторых специальных критериев равномерности или показательности;
- в построенных таблицах процентных точек, расширяющих возможности применения рассмотренных критериев равномерности и критериев показательности;
- в выявленных отклонениях распределений статистик критериев от теоретических;
- в рекомендациях по применению критериев равномерности и показательности при ограниченных объемах выборок.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. Результаты исследования распределений статистик, мощности и сравнительного анализа критериев равномерности.
2. Рекомендации по применению критериев равномерности, опирающиеся на результаты исследований.
3. Результаты исследования распределений статистик, мощности и сравнительного анализа критериев показательности.
4. Рекомендации по применению критериев показательности.
5. Программное обеспечение, позволяющее применять рассмотренные критерии с вычислением достигнутого уровня значимости p -value, в том числе, в условиях отсутствия предельных (асимптотических) распределений статистик критериев.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается:

- корректным применением математического аппарата и методов статистического моделирования для исследования свойств и распределений статистик критериев;

– совпадением результатов статистического моделирования с известными теоретическими результатами.

Личный творческий вклад автора заключается в проведении исследований, обосновывающих основные положения, выносимые на защиту: в разработке программного обеспечения, в проведении статистического моделирования распределений статистик, в вычислении оценок мощности критериев относительно конкретных альтернатив, в построении моделей распределений статистик и вычислении таблиц процентных точек (критических значений).

Практическая ценность и реализация результатов. Результаты сравнительного анализа критериев позволяют обосновать выбор критерия для проверки гипотез о равномерности и показательности, как при наличии конкурирующих гипотез определенного вида, так и в их отсутствие. Результаты исследований и средства моделирования включены в программную систему «Интервальная статистика» ISW и используются в научных исследованиях и учебном процессе. Интерактивное моделирование неизвестных распределений статистик критериев позволяет корректно применять множество критериев равномерности и показательности при ограниченных объемах выборок с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} .

Диссертационные исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проекты № 2.541.2014/К и № 1.1009.2017/ПЧ)

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Содержание диссертации соответствует п.5 области исследований «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений» паспорта специальности научных работников 05.13.17 – «Теоретические основы информатики» по техническим наукам.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международном семинаре “Applied Methods of Statistical Analysis”, Новосибирск, 2015г. и 2017г.; международном форуме по стратегическим технологиям “International Forum on Strategic Technology, IFOST-2016”, Новосибирск, 2016 г.; международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы электроники и приборострое-

ния», Новосибирск, 2014г., 2016г. и 2018г.; российской научно-технической конференции “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”, Новосибирск, 2013г., 2015г., 2016г., 2017г. и 2018г.; всероссийской научной конференции молодых ученых “Наука. Технология. Инновации”, Новосибирск, 2012г., 2014г. и 2015г., седьмой международной научно-технической конференции “Измерения и испытания в судостроении и смежных отраслях – СУДОМЕТРИКА-2018”, 2018г.

Публикации. По результатам диссертационных исследований опубликованы 22 печатных работы, в том числе 3 статьи в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендуемых ВАК РФ, 5 статьями в рецензируемых трудах международных конференций, индексируемых в Scopus и Web of Sciences, 1 монография (в соавторстве), 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ, 11 публикаций в материалах международных и российских конференций.

Структура работы. Общий объем диссертационной работы составляет 249 страниц. Работа состоит из введения, 5-и глав основного содержания, включая 170 таблиц и 72 рисунка, заключения, списка литературы из 139 наименований и 5-и приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении аргументирована актуальность исследования, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, показана научная новизна полученных результатов и область их практического применения, приведены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе дается введение в задачи исследования, включая обзор и обоснование выбора задач проверки равномерности и показательности, даются некоторые общие сведения, связанные с проверкой статистических гипотез.

Представляются группы, на которые делятся рассматриваемые критерии равномерности в зависимости от вида статистик и применяемых оценок.

Приводятся законы распределения, предлагаемые для дальнейшего использования в качестве близких конкурирующих гипотез при сравнительном анализе критериев равномерности и показательности. Именно такой выбор конкурирующих гипотез позволил выявить некоторые недостатки исследуемых критериев. В

качестве конкурирующих при проверке равномерности рассматриваются гипотезы:

$$H_1 : F(x) = B_I(1.5, 1.5, 1, 0), x \in [0, 1];$$

$$H_2 : F(x) = B_I(0.8, 1, 1, 0), x \in [0, 1];$$

$$H_3 : F(x) = B_I(1.1, 0.9, 1, 0), x \in [0, 1],$$

где $B_I(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ – функция бета-распределения 1-го рода при конкретных значениях параметров. Функция плотности бета-распределения 1 рода имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_1 - 1},$$

где $B(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1) / \Gamma(\theta_0 + \theta_1)$ – бета-функция, $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$ – параметры формы, $\theta_2 \in (0, \infty)$ – масштабный параметр, $\theta_3 \in (-\infty, \infty)$ – параметр сдвига, $x \in [0, \theta_2]$.

При проверке показательности в качестве близких конкурирующих гипотез рассматриваются законы с различной интенсивностью отказов:

H_1 : $LN(1)$ – логнормальное распределение с плотностью $f(x) = (\theta x \sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(\ln x)^2 / 2\theta^2)$ и с параметром масштаба $\theta = 1$ в качестве гипотезы с немонотонной интенсивностью отказов;

H_2 : $W(0.7)$ – распределение Вейбулла с плотностью $f(x) = \theta x^{\theta-1} \exp(-x^\theta)$, с параметром формы $\theta = 0.7$ в качестве гипотезы с убывающей интенсивностью отказов;

H_3 : $W(1.2)$ – распределение Вейбулла с параметром формы $\theta = 1.2$ в качестве гипотезы с возрастающей интенсивностью отказов.

Обосновывается важность разработки программного обеспечения, реализующего технологии компьютерного моделирования и используемого в качестве инструмента исследований, уточняется точность моделирования, применяемого в исследованиях.

Во второй главе методами статистического моделирования исследуются свойства множества специальных критериев (более 20), ориентированных на проверку принадлежности выборок равномерному закону (критерии Шермана,

Кимбелла, Морана, Ченга-Спиринга, Хегази-Грина, Янга, Фросини, Гринвуда-Кэсенберри-Миллера, Неймана-Бартона, Дудевича-ван дер Мюлена, Кресси, Пардо, Шварца, Корреа и модификации критерия Гринвуда, энтропийного критерия Дудевича-ван дер Мюлена, критерия Андерсона-Дарлинга). Построены расширенные таблицы критических значений (Таблицы А.1-А.18), представленные в приложении А. В случае существования предельных распределений статистик критериев, исследована сходимость к ним эмпирических распределений статистик, оценены объёмы выборок, начиная с которых можно пренебречь отклонением реальных распределений статистик от предельных.

Таблица 1 – Предельные распределения критериев равномерности

Критерий	Асимптотическое распределение	Объем выборок
Шермана (2 аппроксимации)	Стандартный нормальный закон	$n \geq 20$
Фросини	Бета-распределение III рода с параметрами (3.6064, 4.0008, 5.4476, 1.33, 0.095)	$n \geq 50$
Янга (аппроксимация)	Стандартный нормальный закон	$n > 50$
Нейман-Бартон с 3-мя статистиками	Распределение Хи-квадрат Пирсона со степенями свободы 2-4	$n > 20$
Модифицированный Андерсона-Дарлинга	Распределение $a_2(S)$	$n \geq 300$

Для критериев с оконным параметром m (в частности, для группы энтропийных критериев) исследовано влияние этого дополнительного параметра на мощность критерия. Исходя из полученных оценок мощности, сделаны рекомендации по оптимальному выбору m в соответствующем критерии в зависимости от объема выборки n . В условиях неизвестной конкурирующей гипотезы предлагается использовать значения, предложенные Eshan Zamanzade для оценки энтропии, которые представлены в таблице 2. В условиях же известной конкурирующей гипотезы предлагается использовать другие значения m , зависящие от критерия и конкурирующей гипотезы.

Таблица 2 – Оптимальные значения m^*

n	m^*	n	m^*	n	m^*
$n \leq 5$	1	$19 \leq n \leq 29$	4	$101 \leq n \leq 150$	7
$6 \leq n \leq 8$	2	$30 \leq n \leq 39$	5	$151 \leq n \leq 200$	8
$9 \leq n \leq 18$	3	$40 \leq n \leq 100$	6	$n > 200$	9

Для множества специальных критериев равномерности получены оценки мощности относительно трёх рассматриваемых конкурирующих гипотез при объемах выборок $n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200$ и 300 . Соответствующие таблицы с оценками мощности (Таблицы Б.1-Б.54) представлены в приложении Б. Проведен сравнительный анализ мощности специальных критериев. Рассматриваемые критерии упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез.

При относительно небольших объемах выборок и малых уровнях значимости α впервые показана смещённость большей части исследуемых критериев равномерности относительно близких конкурирующих законов с функциями распределениями, пересекающими функцию распределения равномерного закона (мощность $1 - \beta$ оказалась меньше заданной вероятности α ошибки первого рода относительно гипотезы H_1).

Подготовлены рекомендации по применению данной группы критериев, учитывающие найденные достоинства и недостатки конкретных критериев.

В третьей главе исследованы свойства множества критериев, ориентированных на проверку принадлежности выборок экспоненциальному закону (критерии Шапиро-Уилка, Фросини, Кимбера-Мичела, Фишера, Бартлетта-Морана, Пизетра, Эпса-Палли, Холландера-Прошана, наибольшего интервала, Кочара, Климко-Антла-Радемакера-Рокетта, Гринвуда, Лоулесса, Дешпанде, Эпштейна, Морана, Хегази-Грина и корреляционные критерии). Построенные расширенные таблицы критических значений (Таблицы В.1-В.16) приведены в приложении В. В случае существования предельных распределений статистик критериев, исследована сходимость к ним эмпирических распределений статистик, оценены объёмы выборок, начиная с которых можно пренебречь отклонением реальных распределений статистик от предельных. (Таблица 3)

Для некоторых критериев, зависящих от соответствующих параметров, исследовано влияние этих параметров на мощность критерия относительно конкурирующих гипотез, рассматриваемых при проверке показательности. В частности, исследовано влияние дополнительного параметра b на эффективность критерия Дешпанде. На основании полученных оценок мощности (Таблица 4) предложено применять критерий при $b = 0.1$ или $b = 0.3$.

Для рассмотренных критериев показательности построены таблицы с оценками мощности относительно трёх рассматриваемых конкурирующих гипотез при объемах выборок $n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200$ и 300 , которые (Таблицы Г.1-Г.48) представлены в приложении Г. Проведен сравнительный анализ мощности рассмотренных критериев показательности.

Таблица 3 – Предельные распределения критериев показательности

Критерий	Асимптотическое распределение	Объем выборок
Фросини	Бета-распределение III рода с параметрами (6.2709, 3.3633, 6.262, 0.573, 0.0841)	$n \geq 50$
Фишера	Распределение Фишера со степенями свободы $2n - 2$ и 2	$n \geq 20$
Пиэтра (2 аппроксимации)	Стандартный нормальный закон	$n \geq 20$
Эппса-Палли	Стандартный нормальный закон	$n > 200$
Модифицированный Холландера-Прошана	Стандартный нормальный закон	$n \geq 400$
Модифицированный Дешпанде	Стандартный нормальный закон	$n \geq 100$
Морана	Стандартный нормальный закон	$n > 500$

Таблица 4 – Мощность критерия Дешпанде в зависимости от b

$J(b)$	H_1			H_2			H_3		
	α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
$J(0.1)$	0.482	0.329	0.110	0.874	0.807	0.621	0.355	0.241	0.089
$J(0.2)$	0.371	0.243	0.080	0.891	0.829	0.663	0.398	0.275	0.106
$J(0.3)$	0.309	0.194	0.059	0.890	0.831	0.669	0.408	0.284	0.109
$J(0.4)$	0.265	0.164	0.048	0.888	0.830	0.659	0.402	0.280	0.106
$J(0.5)$	0.243	0.144	0.040	0.881	0.816	0.646	0.399	0.272	0.100
$J(0.6)$	0.224	0.132	0.035	0.865	0.798	0.624	0.387	0.264	0.096
$J(0.7)$	0.210	0.123	0.031	0.835	0.767	0.579	0.371	0.252	0.086
$J(0.8)$	0.193	0.114	0.027	0.788	0.709	0.481	0.341	0.231	0.075
$J(0.9)$	0.170	0.094	0.024	0.641	0.552	0.310	0.287	0.179	0.058

В процессе исследований показаны как достоинства, так и недостатки отдельных критериев. В частности, впервые показано, что некоторые критерии не способны отличать от проверяемой гипотезы H_0 конкурирующие гипотезы вида H_3 с возрастающими интенсивностями отказов (Таблица 6).

В четвертой главе рассмотрено применение для проверки гипотез о равномерности и экспоненциальности множества классических критериев согласия. Рассмотрено применение непараметрических критериев согласия Андерсона–Дарлинга, Крамера–Мизеса–Смирнова, Ватсона, Купера, Колмогорова, критериев Жанга со статистиками Z_A , Z_C и Z_K , а также критерия χ^2 Пирсона.

Впервые показано, что при проверке равномерности критерии Андерсона–Дарлинга, Крамера–Мизеса–Смирнова и Колмогорова, а также критерий Жанга со статистикой Z_A (как и ряд специальных критериев) относительно конкурирующих гипотез типа H_1 при небольших объёмах выборок и малых уровнях значимости α проявляют смещённость.

Исследовано влияние выбора числа интервалов на мощность критерия χ^2 Пирсона при проверке равномерности и показательности при ограниченных объёмах выборок. Показано, как меняется оптимальное число интервалов в зависимости от рассматриваемых конкурирующих гипотез (при проверке равномерности – при использовании равновероятного группирования, а при проверке показательности – при равновероятном и асимптотически оптимальном группировании).

На основании полученных оценок мощности приводятся результаты сравнительного анализа мощности всего множества критериев, используемых при проверке равномерности (Таблица 5), и критериев, используемых при проверке показательности (Таблица 6). Критерии в таблице 5 упорядочены по величине мощности $1 - \beta$, проявленной при $n = 100$ и уровне значимости $\alpha = 0.1$, а в таблице 6 – при $n = 100$ и уровне значимости $\alpha = 0.05$. Темным фоном в таблицах 5 и 6 выделены критерии, которые показали очень низкую мощность относительно соответствующей гипотезы при малых объёмах выборок n (обладают ярко выраженной смещённостью).

Результаты всех проведенных исследований можно подытожить следующим образом. Корректного использования какого-то одного из критериев для формирования “надежного” статистического вывода может оказаться недостаточно. Для большей объективности статистических выводов предпочтительней воспользоваться некоторым рядом критериев, обладающих определёнными достоинствами, что позволит повысить обоснованность выводов.

Таблица 5 – Упорядоченность критериев равномерности по мощности, проявленной относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Модификация энтропийного критерия 2	0.883	Андерсона–Дарлингга	0.648	Андерсона–Дарлингга	0.526
2	Жанга Z_A	0.850	Хегази-Грина T_1	0.610	Хегази-Грина T_1	0.522
3	Неймана–Бартона N_2	0.837	Жанга Z_C	0.606	Фросини	0.522
4	Кресси 2	0.820	Фросини	0.603	Хегази-Грина T_1^*	0.520
5	Жанга Z_C	0.819	Хегази-Грина T_2	0.602	Модификация критерия Андерсона–Дарлингга	0.519
6	Дудевича–ван дер Мюлена	0.790	Неймана–Бартона N_2	0.597	Хегази-Грина T_2	0.508
7	Модификация энтропийного критерия 1	0.789	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.595	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.507
8	Корреа	0.782	Хегази-Грина T_1^*	0.595	Хегази-Грина T_2^*	0.506
9	Ватсона	0.779	Жанга Z_K	0.590	Жанга Z_C	0.463
10	Неймана–Бартона N_3	0.766	Модификация критерия Андерсона–Дарлингга	0.585	Жанга Z_A	0.459
11	Неймана–Бартона N_4	0.739	Хегази-Грина T_2^*	0.585	Колмогорова	0.450
12	Купера	0.736	Неймана–Бартона N_3	0.577	Неймана–Бартона N_2	0.447
13	Модификация критерия Андерсона–Дарлингга	0.730	Жанга Z_A	0.574	Жанга Z_K	0.438
14	Ченга–Спиринга	0.722	Неймана–Бартона N_4	0.557	Неймана–Бартона N_3	0.416
15	Жанга Z_K	0.617	Колмогорова	0.542	Неймана–Бартона N_4	0.381
16	χ^2 Пирсона	0.593	Пардо	0.463	χ^2 Пирсона	0.374
17	Шварца	0.583	χ^2 Пирсона	0.448	Пардо	0.291
18	Андерсона–Дарлингга	0.505	Купера	0.364	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.287
19	Хегази-Грина T_1^*	0.443	Ватсона	0.356	Дудевича–ван дер Мюлена	0.275
20	Хегази-Грина T_2^*	0.409	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.328	Модификация энтропийного критерия 1	0.275
21	Пардо	0.408	Модификация энтропийного критерия 1	0.328	Модификация энтропийного критерия 2	0.267
22	Фросини	0.384	Дудевича–ван дер Мюлена	0.327	Корреа	0.267
23	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.358	Кресси 1	0.314	Ватсона	0.257
24	Хегази-Грина T_1	0.322	Корреа	0.313	Купера	0.254

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
25	Колмогорова	0.322	Модификация энтропийного критерия 2	0.266	Кресси 2	0.226
26	Хегази-Грина T_2	0.308	Гринвуда-Кэсенберри-Миллера	0.244	Кресси 1	0.218
27	Гринвуда-Кэсенберри-Миллера	0.290	Шварца	0.226	Шварца	0.206
28	Кимбелла	0.279	Кресси 2	0.217	Гринвуда-Кэсенберри-Миллера	0.186
29	Морана 1	0.279	Шермана	0.204	Кимбелла	0.165
30	Гринвуда	0.279	Кимбелла	0.201	Морана 1	0.165
31	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.230	Морана 1	0.201	Гринвуда	0.165
32	Шермана	0.215	Гринвуда	0.201	Шермана	0.154
33	Кресси 1	0.187	Морана 2	0.193	Морана 2	0.143
34	Морана 2	0.187	Ченга-Спиринга	0.168	Ченга-Спиринга	0.106
35	Янга	0.115	Янга	0.108	Янга	0.104

Таблица 6 – Упорядоченность критериев показательности по мощности, проявленной относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Хегази-Грина 1	0.996	Бартлетта-Морана	0.993	Бартлетта-Морана	0.582
2	Хегази-Грина 2	0.985	Лоулесса	0.993	Лоулесса	0.582
3	Жанга Z_A	0.964	Морана	0.993	Морана	0.582
4	Жанга Z_C	0.920	Эпштейна	0.990	Эппса-Палли	0.570
5	Кимбера-Мичела	0.879	Андерсона-Дарлинга	0.990	Жанга Z_A	0.554
6	Жанга Z_K	0.822	Дешпанде (0.3)	0.983	Эпштейна	0.552
7	Андерсона-Дарлинга	0.702	Эппса-Палли	0.982	Фросини	0.533
8	Ватсона	0.701	Холландера-Прошана	0.980	Холландера-Прошана	0.530
9	Дешпанде (0.1)	0.669	Фросини	0.977	Дешпанде (0.3)	0.527
10	Купера	0.669	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.977	Андерсона-Дарлинга	0.526
11	Фросини	0.585	Жанга Z_C	0.977	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.522
12	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.564	Дешпанде (0.1)	0.976	Пиэтра	0.520
13	Корреляционный критерий 2	0.548	Пиэтра	0.974	Жанга Z_C	0.516
14	Шапиро-Уилка 1	0.541	Жанга Z_A	0.974	Кочара	0.510
15	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.541	Жанга Z_K	0.973	Шапиро-Уилка 2	0.489
16	Корреляционный критерий 1	0.525	Кочара	0.963	Гринвуда	0.489
17	χ^2 Пирсона	0.501	Колмогорова	0.956	Кимбера-Мичела	0.472
18	Колмогорова	0.456	Хегази-Грина 1	0.948	Дешпанде (0.1)	0.449

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
19	Шапиро-Уилка 2	0.440	Кимбера-Мичела	0.947	Шапиро-Уилка 1	0.438
20	Гринвуда	0.440	Хегази-Грина 2	0.938	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.438
21	Дешпанде (0.3)	0.386	Ватсона	0.921	Колмогорова	0.434
22	Макс интервал	0.366	Купера	0.909	Ватсона	0.410
23	Кочара	0.320	Шапиро-Уилка 2	0.906	Жанга Z_K	0.401
24	Эпштейна	0.258	Гринвуда	0.906	Купера	0.373
25	Бартлетта-Морана	0.218	Шапиро-Уилка 1	0.893	χ^2 Пирсона	0.266
26	Лоулесса	0.218	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.893	Макс интервал	0.185
27	Морана	0.218	χ^2 Пирсона	0.846	Корреляционный критерий 1	0.060
28	Эппс-Палли	0.214	Макс интервал	0.462	Хегази-Грина 1	0.033
29	Холландера-Прощана	0.202	Корреляционный критерий 2	0.442	Фишера	0.023
30	Пиэтра	0.167	Корреляционный критерий 1	0.422	Корреляционный критерий 2	0.019
31	Фишера	0.037	Фишера	0.139	Хегази-Грина 2	0.006

В пятой главе кратко описаны фрагменты программного обеспечения, реализованного в рамках программной системы ISW, связанного с реализацией подсистем, ориентированных на исследование распределений статистик множеств критериев равномерности и показательности, а также предназначенных для применения этих групп критериев при анализе данных в различных приложениях.

В разделе 5.1 описывается методика интерактивного моделирования распределений статистик критериев, используемая при проверке гипотез в ситуациях, когда распределения статистик отличны от асимптотических или информация о распределениях статистик ограничена лишь таблицами критических значений. Реализованный интерактивный режим моделирования, использующий распараллеливание вычислений, позволяет по полученным эмпирическим распределениям статистик вычислять достигнутый уровень значимости p_{value} . Это даёт возможность формировать более обоснованные статистические выводы при использовании критериев. Приводится техническое описание инструментария, используемого при интерактивных проверках по применяемым критериям равномерности и показательности, описанным в главах 2 и 3. На конкретных примерах демонстрируются точность при оценке p_{value} в зависимости от числа имитационных экспериментов N .

При анализе сложных систем, в частности при метрологическом обеспечении возникает задача нахождения закона распределения случайной величины $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_k)$, где X_i – случайные величины, подчиняются различным законам распределения, в том числе, равномерному, показательному, нормальному и т.д. В разделе 5.2 приведено описание разработанной подсистемы, позволяющей моделировать законы распределения для различных функций. Приводятся примеры применения. На основании получаемых эмпирических распределений для Y с использованием средств, встроенных в ISW, можно строить приближенные математические модели для закона распределения Y .

Для описания функций от случайных величин X_i , образующих функцию $\varphi(\cdot)$, в разработанном инструментарии доступны следующие операции:

- Бинарные операции: сложение (+), вычитание (-), умножение (*), деление (/), деление по модулю (%), возведение в степень (^);
- унарные операции: унарный минус, извлечение квадратного корня (sqrt), взятие модуля (abs), тригонометрические операции (sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg, sh, ch, th, cth, exp), логарифмические операции (lg, ln);
- n -арные операции: нахождение минимума (min), нахождение максимума (max), нахождение среднего (avg) и суммы (sum) множества случайных величин;
- в системе также доступны известные константы e (e) и π (pi).

В разделе 5.3. показаны возможности программного обеспечения для анализа проблем, связанных с применением критериев проверки статистических гипотез к большим массивам данных (Big Data). На примере критериев равномерности и показательности демонстрируется, что проблемы связаны не столько с ростом вычислительных затрат, сколько с ограниченной точностью представления данных в больших выборках (меняется распределение статистики при справедливости H_0). Показывается, что та же самая проблема имеет место в случае применения критериев к выборкам ограниченного объема с большим числом повторяющихся значений (из-за существенной степени округления Δ). Подчеркивается, что эти проблемы могут быть устранены при использовании в процессе проверки гипотезы реальных распределений статистик критериев, имеющих место при объемах выборок n и степени округления Δ , соответствующей анализируемым данным. Такая возможность реализована в

разработанном программном обеспечении и может использоваться как при исследовании распределений статистик критериев, так и при их интерактивном моделировании в ходе проверки гипотезы по соответствующему критерию.

В приложениях приведены уточнённые в работе таблицы критических значений и таблицы полученных оценок мощности критериев равномерности и показательности относительно рассмотренных конкурирующих гипотез, акты об использовании результатов исследований и свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Методами статистического моделирования исследованы свойства множества специальных критериев, ориентированных на проверку равномерности. Показаны достоинства и недостатки отдельных критериев. Исследована сходимость распределений статистик, имеющих место при справедливости проверяемой гипотезы, к предельным распределениям. Расширены таблицы процентных точек. Сформулированы рекомендации по выбору оконного параметра у энтропийных критериев проверки равномерности.

2. Методами статистического моделирования исследована мощность множества специальных критериев, а также критериев согласия, используемых для проверки равномерности, относительно некоторых близких конкурирующих гипотез. Отмечена смещенность ряда специальных критериев и некоторых критериев согласия относительно близких конкурирующих гипотез с законами, функции распределения которых пересекают функцию распределения равномерного закона.

3. Проведен сравнительный анализ мощности множества критериев, используемых для проверки равномерности. Подготовлены рекомендации по применению критериев, учитывающие наличие альтернатив того или иного вида.

4. Методами статистического моделирования исследованы свойства некоторых специальных критериев, ориентированных на проверку гипотезы о принадлежности выборок показательному закону распределения. Исследована сходимость распределений статистик, имеющих место при справедливости проверяе-

мой гипотезы, к предельным распределениям. Расширены таблицы процентных точек. Показаны достоинства и недостатки отдельных критериев.

5. Исследована мощность рассмотренных критериев показательности относительно ряда конкурирующих законов с различными формами функции интенсивности отказов.

6. Проведен сравнительный анализ мощности множества критериев, используемых для проверки показательности. Сделаны рекомендации по применению критериев, учитывающие наличие альтернатив того или иного вида.

7. Разработано программное обеспечение, позволяющее исследовать распределения статистик рассмотренных критериев равномерности и показательности, осуществлять проверку гипотез с использованием данных критериев с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} , в том числе, в условиях отсутствия предельных (асимптотических) распределений $G(S|H_0)$ статистик критериев.

8. Разработано программное обеспечение, позволяющее с использованием статистического моделирования исследовать законы распределения функций от случайных величин, подчиняющихся различным законам распределения.

9. Разработанное программное обеспечение, ориентированное на исследование распределений статистик рассмотренных критериев, на использование этих критериев для проверки соответствующих статистических гипотез, а также ориентированное на исследование статистических закономерностей, связанных с функциями от случайных величин, встроено в программную систему «Интервальная статистика» ISW.

Полученные результаты и разработанное программное обеспечение используются в учебном процессе факультета прикладной математики и информатики в рамках курса «Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010400 — прикладная математика и информатика.

Результаты и программное обеспечение используются при проведении научных исследований, используются метрологическими НИИ при статистическом

анализе измерений, связанных с различными задачами метрологического обеспечения, что подтверждается соответствующими актами.

Разработанное программное обеспечение зарегистрировано в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663326 и 2018666213).

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в ведущих рецензируемых научных изданиях перечня ВАК РФ

1. Блинов П.Ю. Смещённость непараметрических критериев согласия относительно некоторых пар конкурирующих гипотез / Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю., Лемешко С.Б. // Измерительная техника. 2016. № 5. – С. 16-20. [Blinov P.Yu. Bias of nonparametric goodness-of-fit tests relative to certain pairs of competing hypotheses / Lemeshko B.Yu., Blinov P.Yu., Lemeshko S.B. // Measurement Techniques, Vol. 59, No. 5, August, 2016. – P.468-475.]

2. Блинов П.Ю. О критериях проверки равномерности закона распределения вероятностей / Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю., Лемешко С.Б. // Автометрия. 2016. 52. № 2. – С. 28-42. [Blinov P.Yu. Goodness-of-Fit Tests for Uniformity of Probability Distribution Law/ Lemeshko B.Yu., Blinov P.Yu, Lemeshko S.B. // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. March 2016, Vol. 52, Issue2. – P.128-140.]

3. Блинов П.Ю. Сравнительный анализ критериев проверки гипотезы о равномерности закона / Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю. // Измерительная техника. 2016. № 10. – С. 9-15. [Blinov P. Yu. Comparative Analysis of the Criteria for Checking the Hypothesis of Uniformity of Law / Lemeshko B. Yu., Blinov P. Yu. // Measurement Techniques. 2017. Vol. 59. № 10. – P.1034-1041.]

Публикации в изданиях, индексируемых в международных базах

4. Blinov P.Yu. A Review of the Properties of tests for Uniformity / Blinov P.Yu., Lemeshko B.Yu. // 2014 12th International Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE) 34006 Proceedings. Vol. 1. Novosibirsk, 2014. –P.540-547.

5. Blinov P. Yu. The simulation system and research of functions random variables / Blinov P. Yu., Lemeshko B.Yu. // 2016 13th International Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE) – 39281 Proceedings. Vol.1, Part 2, Novosibirsk, 2016. – P.203-209.

6. Blinov P. Yu. A review of the properties of some tests for exponentiality / Blinov P. Yu., Lemeshko B.Yu. // 2018 14th International Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE) – 44894 Proceedings. Vol.1, Novosibirsk, 2018. – P.25-32.

7. Blinov P. Yu. The comparative analysis of some uniformity tests / Blinov P. Yu., Lemeshko B.Yu. // Proceedings 2016 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST), June 1-3, 2016, Novosibirsk, Russia. Part 1. – P.342-346.
8. Blinov P.Yu. The Comparative Analysis of Tests in the Problem of Testing the Hypothesis of Uniformity / Blinov P.Yu., Lemeshko B.Yu. // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach” – AMSA’2015, Novosibirsk–Belokuricha, Russia, 14-19 September, 2015. – P.92-100.
9. Blinov P.Yu. Powers of Some Tests for Exponentiality / Blinov P.Yu., Lemeshko B.Yu. // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric methods in Cybernetics and system Analysis". 18-22 September 2017, Krasnoyarsk. – P.173-180.

Другие публикации по теме

10. Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению: Монография. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. –183с. – (Научная мысль).
11. Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю. О мощностях критериев, используемых для проверки гипотез о принадлежности выборок равномерному закону // Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2013. – С.35-38.
12. Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю. О критериях проверки отклонения распределения от равномерного закона // Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2015. – С.21-31.
13. Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю. О критериях проверки равномерности, использующих оценки энтропии // Материалы Российской НТК “Обработка информации и математическое моделирование”, Новосибирск. 2015. – С.32-41.
14. Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю. О мощностях модификации критерия проверки равномерности Андерсона-Дарлинга // Обработка информации и математическое моделирование: материалы Российской научно-технической конференции. Новосибирск, 21–22 апр. 2016 г. – Новосибирск: СибГУТИ, 2016. – С.18-26.
15. Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю. Сравнительный анализ некоторых критериев проверки показательности // Обработка информации и математическое моделирование: материалы Российской научно-технической конференции. Новосибирск, 25–26 апр. 2017 г. –Новосибирск: СибГУТИ, 2017. – С.6-13.
16. Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю. Свойства критериев экспоненциальности Дешпанде // Обработка информации и математическое моделирование: материалы Российской научно-технической конференции. Новосибирск, 27–28 апр. 2018 г. – Новосибирск: СибГУТИ, 2018. – С.10-16.

17. Блинов П.Ю. Исследование распределений некоторых функций от нормально распределенных случайных величин // Наука. Технологии. Инновации: материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых, Новосибирск, 02–06 дек. 2014 г.: в 11 частях – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – Ч. 2. – С.10–14.
18. Блинов П.Ю. Исследование мощности критерия Корреа при проверке равномерности // Наука. Технологии. Инновации: сборник научных трудов: в 9 частях, Новосибирск, 1–5 дек. 2015 г. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. – Ч. 2. – С.3–5.
19. Lemeshko V.Yu., Blinov P.Yu., Veretelnikova I.V., Lemeshko S.B. Statistical Simulation as a Toll for Solving Problems and Expanding the Scope of Classical Criteria of Testing Statistical Hypotheses // Eighth International Workshop on Simulation. Book of Abstracts. / Editors: Dieter Rasch, Viatcheslav Melas, Jürgen Pilz, Karl Moder, Bernhard Spangl / Vienna, September 21-25, 2015. С Р. 124. (*тезисы НТК*)
20. Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю., Веретельникова И.В., Лемешко С.Б., Новикова А.Ю. Статистический анализ результатов измерений: методы, критерии проверки гипотез, проблемы применения и их решение // Материалы седьмой международной научно-технической конференции «Измерения и испытания в судостроении и смежных областях – СУДОМЕТРИКА-2018», 15-17 октября 2018 г., Санкт-Петербург. – С.158–167.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

21. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Блинов П.Ю., Веретельникова И.В. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин “Интервальная статистика 5.3” // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности № 2015663326 от 15.12.2015.
22. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Блинов П.Ю., Веретельникова И.В., Новикова А.Ю. Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин “Интервальная статистика 5.4” // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности № 2018666213 от 13.12.2018.

Отпечатано в типографии Новосибирского
государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса 20
Тел./факс (383) 346-08-57
Формат 60x84 1/16. Объем 1,5 п.л. Тираж 100 экз.
Заказ № 759. Подписано в печать 19.04.2019 г.